# **Часть I Минимизация функций одной переменной**

Основной целью этой книги является обсуждение трудностей, возникающие при практическом решении задач оптимального управления. Однако аналогичные проблемы проявляются уже на уровне самой простой задачи на отыскание экстремума, которая состоит в минимизации функции одной переменной без каких-либо дополнительных ограничений. Этим вопросам посвящена первая часть, которая носит вводный характер. Она состоит из двух разделов, в первом из которых приводится классическая теорема Ферма, характеризующая необходимое условие локального экстремума функции. Во втором разделе обсуждаются некоторые дополнительные вопросы, связанные с минимизацией функции одной переменной. В частности, там рассматриваются задача на условный минимум функции, минимизация функции, зависящей от параметра и приближенные методы минимизации функций.

## **1. Безусловный минимум функции**

Простейшей задачей теории экстремума является задача отыскания безусловного минимума функции одной переменной. Мы ограничимся рассмотрением простейшего и в то же время основополагающего результата теории экстремума, согласно которому производная функции в точке ее минимума обращается в нуль. В Лекции мы дадим обоснование этого утверждения и рассмотрим различные примеры, связанные с его практическим применением для конкретных функций. Возникающие при этом дополнительные проблемы (существование и единственность точек минимума, корректность задачи минимизации по Тихонову, достаточность условия экстремума, а также минимизация негладких функций) анализируются в Приложении.

### Лекция

В данной лекции рассматривается задача минимизации дифференцируемой функции одной переменной[[1]](#endnote-1). Основным результатом здесь является теорема Ферма, дающая необходимое условие локального экстремума функции. Мы приведем доказательство этой теоремы (Подраздел 1.1) и опишем ее применение для минимизации некоторых достаточно простых функций. В процессе анализа этих примеров всплывают проблемы существования минимума функции (Подраздел 1.3), его единственности, корректности задачи минимизации по Тихонову и достаточности условия экстремума (Подраздел 1.2), а также применимости описываемого метода (Подраздел 1.4).

#### **1.1. Теорема Ферма**

Простейшая задача теории экстремума состоит в минимизации функции одной переменной на всей числовой оси, т.е. ***задача безусловной минимизации функции***.

**Задача 1.1.** *Найти точку минимума функции f=f*(*x*).

Наиболее естественный способ анализа поведения функции связан исследованием свойств ее производной[[2]](#endnote-2).

**Теорема 1.1 (*теорема Ферма*)***. Для того чтобы дифференцируемая функция* *f=f*(*x*) *достигала в точке x своего минимума, необходимо, чтобы она удовлетворяла равенству*

  *f* '(*x*)=0. (1.1)

**Доказательство**. Если *x* есть точка минимума функции *f*, то справедливо неравенство

*f*(*y*) ≥ *f*(*x*) ∀*y*,

откуда следует соотношение

*f*(*x*+*h*) ≥ *f*(*x*) ∀*h*.

Пользуясь разложением в ряд Тейлора с учетом дифференцируемости рассматриваемой функции, установим равенство

*f*'(*x+h*) = *f*'(*x*) *+ f* '(*x*)*h* + *o*(*h*),

где *o*(*h*)/*h*→0 при *h*→0. В результате последнее неравенство принимает вид

 *f* '(*x*)*h* + *o*(*h*) ≥ 0 ∀*h*. (1.2)

Отсюда при *h*>0 следует соотношение

*f* '(*x*) + *o*(*h*)/*h* ≥ 0.

После перехода к пределу при *h*→0 будем иметь

 *f* '(*x*) ≥ 0. (1.3)

Аналогично, из условия (1.2) при *h*<0 следует неравенство

*f* '(*x*) + *o*(*h*)/*h* ≤ 0,

откуда после перехода к пределу при *h*→0 будем иметь

 *f* '(*x*) ≤ 0. (1.4)

Из соотношений (1.3), (1.4) следует условие (1.2).

Итак, поиск минимума функции на множестве действительных чисел сводится к анализу соотношения (1.1), представляющего собой ***алгебраическое уравнение*** (вообще говоря, нелинейное) относительно искомого значения *x*.

**Определение 1.1**. *Уравнение* (1.1) *будем называть* ***условием******стационарности*** *или* ***условием******Ферма****, а его решение –* ***точкой стационарности*** *или* ***критической точкой*** *функции* *f*.

В соответствии с Теоремой 1.1 для решения задачи минимизации функции следует найти ее точки стационарности и установить их свойства[[3]](#endnote-3). Рассмотрим примеры использования теоремы Ферма для минимизации различных функций.

**Пример 1.1**. Дана функция *f*(*x*)=*x*2. Равенство (1.1) для этой нее принимает вид 2*x=*0. Единственное решение *x=*0 полученного уравнения и является точкой минимума функции *f*, см. Рис. 1.1.



Рис. 1.1. Единственная точка стационарности
является абсолютным минимумом функции.

Приведенный пример иллюстрирует принцип решения задачи минимизации функции с помощью теоремы Ферма. Для этого экстремальная задача сводится к соответствующему алгебраическому уравнению, которое и решается непосредственно. Однако при этом возможны некоторые осложнения.

#### **1.2. Условие стационарности с неединственным решением**

Рассмотрим еще один пример.

**Пример 1.2.** Дана функция *f*(*x*)=3*x*4–4*x*3–12*x*2. Соотношение (1.1) приводит к кубическому уравнению *x*3–*x*2–2*x*=0. Оно имеет три решения: *x*1=–1, *x*2=0, *x*3=2, см. Рис. 1.2. Согласно Теореме 1.1, точку минимума данной функции следует искать среди этих величин. Вычисляем значения рассматриваемой функции в найденных точках: *f*(*x*1)=–5, *f*(*x*2)=0, *f*(*x*3)=–32. Наименьшее из полученных чисел и является минимумом рассматриваемой функции. Следовательно, решением задачи минимизации функции *f*является точка *x*3=4.



Рис. 1.2. Точки стационарности функции из Примера 1.2.

Отталкиваясь от Примера 1.2, уточняем схему решения задачи минимизации функции с помощью теоремы Ферма. Если в процессе анализа условия стационарности находится несколько его решений, то точкой минимума данной функции оказывается то из них, которому соответствует наименьшее из значений функции на этих решениях.

Полученные результаты приводят к необходимости уточнения используемых понятий, в частности, точек экстремума[[4]](#endnote-4), см. Рис. 1.3.

**Определение 1.2**. *Функция f имеет в точке x* ***локальный минимум***(*соответственно*,***локальный максимум***), *если существует такая окрестность*[[5]](#endnote-5) *V этой точки, что справедливо неравенство f*(*x*)≤*f*(*y*) (*f*(*x*)≥*f*(*y*), *соответственно*) *для всех y*∈*V. Если в указанных соотношениях знак равенства возможен исключительно при y=x*, *то говорят о* ***строгом******локальном минимуме*** (*максимуме*). *Если же указанные неравенства справедливы для всех значений y*, *то* *x является точкой* ***абсолютного минимума***(***абсолютного максимума***) *функции f*.



Рис. 1.3. Типы экстремумов функции.

Очевидно, из трех точек стационарности в Примере 1.2 первая соответствует локальному минимуму функции, вторая – локальному максимуму исследуемой функции, а третья – ее абсолютному минимуму, см. Рис. 1.2.

Пусть задана экстремальная задача *Р* (не обязательно задача минимизации именно функции и, возможно, задача ее минимизации на каком-то множестве) и некоторое соотношение *Q*, которому могут удовлетворять или не удовлетворять какие-либо объекты из множества, на котором осуществляется нахождение экстремума.

**Определение 1.3**. *Соотношение Q называется* ***необходимым условием экстремума*** *для задачи Р*, *если любое решение этой задачи удовлетворяет соотношению Q*. *Соотношение Q называют* ***достаточным условием экстремума*** *для задачи Р*, *если любой удовлетворяющий ему объект оказывается решением задачи Р*.

Если условия экстремума являются необходимыми и достаточными[[6]](#endnote-6), то его решения и только они оказываются решениями исследуемой экстремальной задачи, т.е. экстремальная задача и условия экстремума эквивалентны, см. Рис. 1.4. В общем случае множество решений условия стационарности оказывается шире множества точек минимума рассматриваемой функции[[7]](#endnote-7), т.е. условие стационарности представляет собой необходимое условие локального экстремума функции[[8]](#endnote-8). Итак, условие стационарности для Примера 1.2 является необходимым, но не достаточным условием минимума данной функции[[9]](#endnote-9).



Рис. 1.4. Соотношения между множествами *U*0 решений
экстремальной задачи и *U*\* решений условия экстремума.

Очевидно, максимум функции *f* соответствует минимуму функции *g*, характеризуемой равенством *g*(*x*)=–*f*(*x*). Вследствие этого задачи максимизации всегда могут быть сведены к задачам минимизации, а значит, не требуют разработки специальной теории[[10]](#endnote-10).

Рассматриваемый ниже пример иллюстрирует еще одно важное свойство задач отыскания экстремумов.

**Пример 1.3**. Требуется найти минимум функции *f*(*x*)=*x*4–2*x*2. Из условия стационарности находим три решения соответствующего алгебраического уравнения (1.1) *x*1=–1, *x*2=0, *x*3=1, см. Рис. 1.5. Из них второе соответствует локальному максимуму рассматриваемой функции, а остальные два являются решениями задачи ее минимизации, поскольку данная функция принимает на них одно и то же значение[[11]](#endnote-11). В данном случае мы имеем дело с отсутствием, как единственности решения задачи, так и достаточности условия стационарности[[12]](#endnote-12).



Рис. 1.5. Функция имеет две точки минимума.

Как следует из приведенных ниже примеров, множество точек абсолютного минимума функции может оказаться достаточно большим.

**Пример 1.4**. Рассматривается функция *f*(*x*)=sin*x*. Соответствующее условие стационарности cos*x=*0 имеет бесконечное множество решений *xk*=*π*/2+*kπ*, где *k* – произвольное целое число, см. Рис. 1.6. При этом четные значения *k* соответствуют точкам абсолютного минимума, а нечетные – точкам максимума. Таким образом, условие стационарности для рассматриваемой функции не является достаточным условием минимума, а множество решений соответствующей задачи минимизации оказывается бесконечным[[13]](#endnote-13).



Рис. 1.6. Функция имеет бесконечное множество точек минимума.

Возможна ситуация, когда множество точек минимума дифференцируемой функции одной переменной оказывается еще более широким.

**Пример 1.5**. Рассматривается функция *f*=*f*(*x*), равная (*x*+1)2 при *x*<–1, нулю при –1≤*x*≤1 и (*x*–1)2 при *x*>1, см. Рис. 1.7. Ее производная обращается в нуль во всех точках из отрезка [–1,1], которые и являются точками минимума данной функции. Тем самым в данном случае условие стационарности является необходимым и достаточным условием минимума, а множество решений задачи минимизации функции *f* не только бесконечно, но даже и не счетно[[14]](#endnote-14).



Рис. 1.7. Множество точек минимума функции не счетно.

Рассмотрим пример, связанный с еще одной характеристикой задач теории экстремума[[15]](#endnote-15).

**Пример 1.6**. Рассматривается функция

**

Находим производную

**

Соответствующее условие стационарности имеет три решениям –1, 0 и 1. Определяем значение функции в этих точках *f*(0)=0, *f*(–1)=*f*(1)=1/2. Очевидно, 0 является точкой абсолютного минимума рассматриваемой функции, а значения –1, 1 – ее точками локальных максимумов, см. Рис. 1.8. Таким образом, задача минимизации функции *f* имеет единственное решение, а соответствующее условие стационарности дает необходимое, но не достаточное условие минимума. С подобной ситуацией мы уже встречались в Примере 1.2. Однако данный пример обладает еще одним удивительным свойством.



Рис. 1.8. Функция из Примера 1.6.

Рассмотрим последовательность {*xk*}, характеризуемую равенствами *xk=k*, *k=*1,2,…. Очевидно, соответствующая последовательность значений {*f*(*xk*)} сходится к нулю, т.е. к минимуму рассматриваемой функции. Последовательности, обладающие подобным свойством, называются ***минимизирующими***. В то же время сама последовательность {*xk*} расходится и не имеет точку минимума (решение задачи) своим пределом. Полученный результат приводит к следующему понятию[[16]](#endnote-16).

**Определение 1.4**. *Задача минимизации функции называется* ***корректной по Тихонову****, если любая минимизирующая последовательность для нее сходится к точке минимума этой функции*.

Итак, в Примере 1.6 рассматривается задача минимизации функции, являющаяся некорректной по Тихонову[[17]](#endnote-17).

В основе многих методов приближенного решения задач теории экстремума лежат итерационные процессы, в которых последующее приближение подбирается таким образом, чтобы соответствующее значение минимизируемой величины оказалось меньше, чем ее предыдущее значение[[18]](#endnote-18). Для некорректных задач такие методы не гарантируют нахождение точки минимума функции с желаемой степенью точности даже при условии их сходимости[[19]](#endnote-19).

В данном подразделе были рассмотрены функции, для которых соответствующие условия стационарности имели неединственное решение. Однако возможна противоположная ситуация, когда условие стационарности вообще не имеет решения.

#### **1.3. Условие стационарности в отсутствии точек минимума функции**

Продолжаем исследование примеров применения теоремы Ферма для поиска минимумов функций.

**Пример 1.7**. Дана функция *f*(*x*)=*x*. Условие стационарности в данном случае сводится к уравнению 1=*f* '(*x*)=0, не имеющему решения. Понятно, что сама задача минимизации рассматриваемой функции также не имеет решения, см. Рис. 1.9. Тем не менее, поскольку множества решений данной задачи и соотношения (1.1) совпадают (оба пусты), то используемое условие экстремума является необходимым и достаточным.



Рис. 1.9. Точки стационарности для неразрешимой экстремальной задачи отсутствуют.

Отсутствие точек стационарности позволяет заключить, что рассматриваемая задача минимизации функции оказывается неразрешимой[[20]](#endnote-20). Отметим, что недостаточность условия экстремума и отсутствие минимума функции являются независимыми свойствами. В частности, в Примере 1.2 минимум существует, но нет достаточности, а в Примере 1.6 есть достаточность, но нет минимума. Дополнительную информацию о соотношении между этими свойствами дает следующий пример.

**Пример 1.8**. Рассматривается функция *f*(*x*)=*x*3. Необходимое условие экстремума здесь имеет единственное решение *x=*0, которое не минимизирует функцию *f*, см. Рис. 1.10. Задача ее минимизации не имеет решения, вследствие чего соотношение (1.1) является необходимым, но не достаточным условием экстремума.



Рис. 1.10. Единственная точка стационарности не минимизирует функцию.

Характерно, что в последнем примере единственная точка стационарности не является даже точкой локального экстремума рассматриваемой функции[[21]](#endnote-21). В данном случае мы имеем дело как с отсутствием точек минимума, так и с недостаточностью условия экстремума. Подобная ситуация особенно неприятна при практическом решении экстремальных задач, которое, как правило, осуществляется на основе тех или иных приближенных методов. Действительно, если условие экстремума не имеет решения, то в процессе численного решения задачи мы ничего и не получим. Однако в ситуации Примера 1.8, решая приближенно условие экстремума, мы можем определить его решение. А поскольку ничего другого найти не удается, а структура реальной задачи достаточно сложна, то может возникнуть ложное впечатление, что решение задачи минимизации найдено[[22]](#endnote-22).

Отметим еще одну возможную ситуацию.

**Пример 1.9**. Рассматривается функция *f*(*x*)=*x*3–3*x*. Условие стационарности здесь имеет два решения *x*1*=*–1 и *x*2*=*1. Первое из них соответствует локальному максимуму, а второе – локальному минимуму функции *f*, в то время как абсолютный минимум не существует, см. Рис. 1.11. Мы вновь сталкиваемся с отсутствием достаточности условия экстремума в случае неразрешимости задачи минимизации, однако с иным сочетанием свойств, чем в предшествующим примере.



Рис. 1.11. Две точки стационарности соответствуют локальным максимуму и минимуму.

Остается уточнить еще один вопрос, связанный с применимостью теоремы Ферма.

#### **1.4. Применимость теоремы Ферма**

Рассмотренные ниже примеры соответствуют случаям, когда условие стационарности оказывается неприменимым для нахождения минимума заданной функции.

**Пример 1.10**. Дана функция *f*(*x*)=|*x*|. Вследствие отсутствия ее дифференцируемости теорема Ферма здесь оказывается не применимой. Таким образом, поиск реально существующей точки минимума *x=*0 (см. Рис. 1.12) требует привлечения другого математического аппарата.



Рис. 1.12. Условие стационарности не применимо.

В Теореме Ферма существенным образом использовалась дифференцируемость минимизируемой функции. Вполне естественно, что при отсутствии этого свойства условие стационарности не имеет смысла[[23]](#endnote-23).

**Пример 1.11**. Требуется минимизировать функцию *f*(*x*)=(*x*+1)2 на отрезке [0,1]. Условие стационарности имеет единственное решение *x=*–1, см. Рис. 1.13. Однако это значение не является решением рассматриваемой задачи, поскольку лежит за пределами заданного интервала. Тем самым применение условия стационарности в данном случае не приводит к желаемым результатам.



Рис. 1.13. В задаче на условный экстремум
решение условия стационарности не является точкой минимума.

В Теореме 1.1 рассматривалась задача на безусловный экстремум функции. Понятно, что при наличии ограничений решение задачи может не удовлетворять условию стационарности[[24]](#endnote-24).

### Итоги

Здесь приводится перечень вопросов в области задач минимизации функции и условия стационарности, основные выводы по этой тематике, а также возникающие при этом проблемы, частично решаемые в Приложения, частично выносимые в Замечания.

#### **Вопросы**

Требуется ответить на вопросы, касающиеся свойств задачи минимизации функции одной переменной и условия стационарности.

1. Каковы условия применимости теоремы Ферма?
2. К какому классу математических задач относится условие стационарности?
3. Применяя условие стационарности, мы не решаем задачу минимизации, а сводим ее к задаче другой природы. Чем оправдан такой подход?
4. Почему условие стационарности и задача минимизации могут не быть эквивалентными?
5. Какими могут быть соотношения между множеством решений задачи минимизации дифференцируемой функции одной переменной и множеством точек стационарности?
6. Может ли число точек стационарности быть меньше числа локальных экстремумов функции?
7. Что следует предпринять, если решение условия стационарности оказывается не единственным?
8. Каким образом можно различить точки минимума и максимума функции, в равной степени удовлетворяющие условию стационарности?
9. Предположим, что было найдено два решения условия стационарности. Как узнать, имеем ли мы дело с недостаточностью условия экстремума или с неединственностью точек минимума?
10. Предположим, что непрерывная функция обладает несколькими локальными экстремумами. Каким образом могут располагаться друг относительно друга различные точки минимума и максимума?
11. Как много решений может иметь условие стационарности?
12. Как много решений может иметь задача минимизации непрерывной функции?
13. Какими свойствами могут обладать решения условия стационарности для функции одной переменной в общем случае?
14. В чем различие между примерами 1.2 и 1.6?
15. Какие трудности могут возникнуть при практической реализации некорректных по Тихонову задач?
16. Почему условие стационарности имеет смысл и при отсутствии решения задачи минимизации функции.
17. Какими свойствами может обладать условие стационарности в случае неразрешимости задачи?
18. Какое заключение можно сделать при отсутствии решения условия стационарности?
19. В каких случаях условие стационарности может оказаться неприменимым?
20. Почему условие стационарности неприменимо для негладких функций?
21. Почему условие стационарности неприменимо для задачи на условный экстремум?
22. Может ли условие стационарности оказаться эффективным в задаче на условный экстремум функции?
23. Что может оказаться решением задачи минимизации непрерывной функции на некотором отрезке?
24. Как распространить условие стационарности на задачу минимизации функции многих переменных?

#### **Выводы**

На основе исследования задачи минимизации функций с помощью теоремы Ферма и результатов анализа конкретных примеров можно сделать следующие заключения.

* Задача безусловной минимизации функции одной переменной может иметь одно, несколько, бесконечное множество точек минимума или вообще не иметь их.
* Для решения задачи минимизации дифференцируемой функции одной переменной на множестве действительных чисел можно воспользоваться теоремой Ферма.
* Теорема Ферма сводит задачу минимизации функции к условию стационарности.
* Условие стационарности представляет собой алгебраическое уравнение.
* Условие стационарности выполняется как для точек минимума функции, так и для ее точек максимума.
* Условие стационарности выполняется не только для точек абсолютного экстремума функции, но и для точек локального экстремума.
* Теорема Ферма дает необходимое условие локального экстремума функции, т.е. любая точка локального экстремума удовлетворяет условию стационарности, но решения условия стационарности могут не быть точками локального экстремума функции.
* Если условие стационарности имеет несколько решений, то оптимальным оказывается то из них, которому соответствует наименьшее из значений минимизируемой функции на этих решениях.
* Задача минимизации функции может оказаться не корректной по Тихонову, что проявляется в том, что минимизирующие последовательности не обязаны сходиться к точке минимума данной функции.
* Если условие стационарности не имеет решений, то это означает отсутствие точек минимума данной функции.
* Условие стационарности не применимо, если рассматривается негладкая функция или ставится задача на условный экстремум функции.

#### **Проблемы**

На основе полученных выше результатов приходим к ниже следующим проблемам минимизации функции, нуждающимся в дальнейшем анализе.

1. **Разрешимость**. В Примерах 1.6, 1.7, 1.8 решение задачи минимизации соответствующих функций не существует, в то время как во всех остальных случаях задача имеет решение. Хотелось бы узнать, какие свойства функции гарантируют существование решения задачи. Эта проблема исследуется в Приложении к данному разделу.
2. **Единственность решения**. В Примерах 1.3, 1.4, 1.5 решение задачи минимизации соответствующих функций не единственно, в то время как во всех остальных случаях задача имеет единственное решение, если, конечно, оно существует. Желательно установить свойства функции, гарантирующие существование решения задачи. Эта проблема исследуется в Приложении.
3. **Корректность по Тихонову**. В Примере 1.6 рассматривалась задача минимизации функции, не корректная по Тихонову. Было бы интересно установить, при каких условиях такая задача оказывается корректной. Эта проблема исследуется в Приложении.
4. **Достаточность**. В Примере 1.2 мы обнаружили недостаточность условия стационарности, вычисляя значения функции в найденных его решениях. Хотелось бы проверить, будут ли решения условия стационарности точками минимума без вычисления функции в них. Эта представляется актуальной, по крайней мере, в том случае, когда каким-то образом найдено лишь одно решение условия стационарности так, что сравнивать значение функции в этой точке не с чем. Данная проблема исследуется в Приложении.
5. **Алгоритм**. Во всех рассмотренных примерах исследовались чрезвычайно простые функции. В результате нахождение решений условия стационарности не вызывало особых затруднений. Однако в общем случае мы имеем дело с нелинейным алгебраическим уравнением, нахождение решения которой явным образом затруднительно. Необходимо уметь находить точки стационарности для достаточно сложных функций. Эта проблема исследуется в последующем разделе.
6. **Негладкость**. В Примере 1.9 мы не смогли воспользоваться условием стационарности в виду отсутствия дифференцируемости минимизируемой функции. Было бы желательно установить какое-то обобщение условия стационарности на случай негладких функции. Эта проблема исследуется в Приложении.
7. **Абсолютный экстремум**. Теорема Ферма дает необходимое условие локального экстремума. Задача отыскания абсолютного экстремума существенно сложнее. О методах поиска абсолютного экстремума см. Замечания[[25]](#endnote-25).
8. **Условный экстремум**. В Примере 1.10 условие стационарности оказалось не эффективным в виду наличия дополнительных ограничений. Разработка методов решения задачи на условный экстремум функции представляется весьма важной. В последующем разделе рассматривается задача минимизации функции на отрезке и задача минимизации функции двух переменных, связанных некоторым равенством. Более сложные задачи на условный экстремум, относящиеся к теории оптимального управления, исследуются в последующих частях книги.
9. **Альтернатива**. Для анализа описанных выше функций применялось условие стационарности. Однако существуют другие методы минимизации функций. По поводу этих методов см. Замечания[[26]](#endnote-26).
10. **Зависимость от параметра**. При решении прикладных задач на экстремум минимизируемая величина часто зависит от некоторых параметров. На практике эти параметры бывают известны с некоторой погрешностью. В этой связи возникает вопрос, насколько малая погрешность в определении параметров повлияет на точность решения задачи минимизации? Отметим и такое обстоятельство. Минимизируемые функции в Примерах 1.2 и 1.3 и, соответственно, в Примерах 1.7 и 1.8 достаточно близки. В частности, они являются полиномами одного и того же порядка, различающиеся исключительно младшими членами. В то же время свойства соответствующих задач существенно различаются. Так, мы имеем дело с функцией *f*(*x*)=*x*3–*ax*, где параметр *a* равен нулю в Примере 1.7 и трем в Примере 1.8. Однако в первом случае имеется единственное решение условия стационарности, являющееся точкой, а во втором – два решения, которые являются точками локальных экстремумов. Очевидно, при сколь угодно малых положительных значениях этого параметра функция будет обладать такими же свойствами, что и в Примере 1.8. Однако при *a*=0 мы получаем Пример 1.7 с качественно иными свойствами. Следовательно, при малом изменении параметра задача минимизации функции качественно меняет свои свойства. Подобного рода эффекты рассматриваются в последующем разделе.
11. **Обобщения**. Мы рассмотрели простейшую задачу минимизации функции одной переменной. В Приложении установленные результаты естественным образом распространяются на функции многих переменных. В последующих частях книги будут рассмотрены задачи оптимального управления, в которых минимизируются функционалы, определенные на некотором классе функций.

### Приложения

При анализе примеров, рассмотренных ранее в лекции, мы сталкивались с рядом проблем, нуждающихся в дополнительном исследовании. Речь идет о существовании и единственности минимума функции, достаточном условии экстремума и минимизации негладкой функций. Ниже приводятся отдельные результаты, проясняющие ситуацию, причем в качестве приложений будут рассмотрены приведенные ранее примеры. В заключительном подразделе приводится информация о задаче минимизации функции многих переменных.

#### **1.5. Существование минимума функции**

В большинстве рассмотренных ранее примерах минимум функции существует, однако в ряде случаев задача минимизации оказывалась не разрешимой. Все эти примеры достаточно просты так, что найти решение задачи или установить отсутствие ее решения можно было достаточно легко. Однако было бы чрезвычайно интересно получить общий результат, проясняющий, почему одни функции обладают минимумами, а другие – нет. Классическим результатом в области разрешимости задач теории экстремума является следующее утверждение[[27]](#endnote-27).

**Теорема 1.2 (*теорема Вейерштрасса*)**. *Непрерывная функция в замкнутой*[[28]](#endnote-28)  *ограниченной области достигает своего минимума и максимума.*

**Доказательство**. Пусть задана непрерывная функция *f*, определенная в замкнутой ограниченной области *U* числовой прямой. Тогда множество значений *f*(*U*) ограничено. Следовательно, существует нижняя грань inf*f*(*U*) этого множества, а значит такая последовательность {*xk*} элементов множества *U*, что *f*(*xk*)→inf*f*(*U*). В силу ограниченности множества *U* эта последовательность ограничена. Пользуясь теоремой Больцано–Вейерштрасса[[29]](#endnote-29), выделяем из нее такую подпоследовательность {*xs*}, что *xs*→*x*. В силу замкнутости[[30]](#endnote-30) множества *U* справедливо включение *x*∈*U.* Учитывая непрерывность функции *f*, установим сходимость *f*(*xs*)→*f*(*x*). Однако вся последовательность {*f*(*xk*)}, а значит, и любая ее подпоследовательность имеет своим пределом число inf*f*(*U*). Отсюда следует, что существует такая точка *x* из множества *U*, для которой выполняется равенство *f*(*x*)= inf*f*(*U*). Тем самым рассматриваемая функция достигает своего минимума на заданном множестве. Существования ее максимума устанавливается аналогично.

Требование замкнутости множества, на котором минимизируется функция, является весьма существенным. Так, в задаче минимизации функции *f*(*x*)=*x* на незамкнутом интервале (0,1) мы имеем дело с функцией, которая непрерывна в ограниченной области. Тем не менее, эта задача не имеет решения в виду отсутствия минимального положительного числа. Та же функция на замкнутом неограниченном множестве (-∞,0], также не имеет минимума. С другой стороны, не имеет экстремума функция *f*(*x*)=1/*x* на замкнутом ограниченном множестве [-1,1], поскольку она не является там непрерывной.

В Примере 1.10 рассматривалась задача минимизации функции *f*(*x*)=(*x*+1)2 на отрезке [0,1]. Мы действительно имеем дело с непрерывной функцией, определенной на замкнутом ограниченном множестве. Таким образом, эта задача имеет решение в силу Теоремы 1.2. Однако для всех остальных рассмотренных ранее примеров мы не имеем возможности воспользоваться этим результатом, поскольку в них рассматриваются задачи на безусловный экстремум, а значит, речь идет о минимизации функции на числовой прямой, которая не является ограниченным множеством. Тем не менее, в большинстве рассмотренных примерах минимум функции существует. В этой связи хотелось бы установить утверждение, гарантирующее разрешимость задачи минимизации функции в неограниченной области. Такой результат можно установить, если функция удовлетворяет некоторому дополнительному свойству.

**Определение 1.4**. Функция *f* называется ***коэрцитивной***, если при |*xk*|→∞ имеет место сходимость *f*(*xk*)→+∞.

Справедливо следующее утверждение[[31]](#endnote-31).

**Теорема 1.3**. *Непрерывная ограниченная снизу коэрцитивная функция на замкнутом подмножестве числовой прямой достигает своего минимума.*

**Доказательство**. Поскольку функция *f* ограничена снизу на замкнутом множестве *U*, существует ее нижняя грань inf*I*(*U*). Таким образом, существует такая последовательность {*xk*} элементов множества *U*, что *f*(*xk*)→inf*f*(*U*). Предположим, что эта последовательность не ограничена, т.е. справедливо условие |*xk*|→∞. Тогда в силу коэрцитивности функции *f* получаем *f*(*xk*)→+∞. Однако ранее было установлено, что последовательность {*f*(*xk*)} имеет своим пределом нижнюю грань данной функции. Следовательно, предположение о неограниченности последовательности {*xk*} не верно. Доказательство завершается так же, как и в Теореме 1.2.

Обратимся теперь к рассмотренным ранее примерам. В качестве области определения всюду, за исключением Примера 1.10, использовалось всё множество действительных чисел, которое замкнуто. Все рассматриваемые функции были непрерывными. В Примере 1.1 минимизировалась функция *f*(*x*)=*x*2, которая, очевидно, ограничена снизу и коэрцитивна. Тем самым существование ее минимума следует из Теоремы 1.3. Аналогичными свойствами обладают и рассмотренные в Примерах 1.2, 1.3 и 1.9 функции *f*(*x*)=3*x*4–4*x*3–12*x*2, *f*(*x*)=*x*4–2*x*2 и *f*(*x*)=|*x*|, а также функция из Примера 1.5. Во всех этих случаях разрешимость задачи минимизации также устанавливается с помощью Теоремы 1.3. С другой стороны, это утверждение не применимо к рассмотренным в Примерах 1.6, 1.7 и 1.8 функциям *f*(*x*)=*x*, *f*(*x*)=*x*3 и *f*(*x*)=*x*3–3*x* в виду их неограниченности снизу. Все они не обладают минимумами. Остается еще функция *f*(*x*)=sin*x* из Примера 1.4, которая, будучи ограниченной, не является коэрцитивной. Тем не менее, она достигает своего минимума. Однако условия Теорем 1.2 и 1.3 являются достаточными условиями существования минимума функции, т.е. нарушение этих свойств не означает, что соответствующая задача минимизации оказывается неразрешимой[[32]](#endnote-32).

#### **1.6. Единственность минимума функции**

Во многих рассмотренных ранее примеров точка минимума функции была единственной, однако в ряде случаев решение не было единственным. В этой связи хотелось бы выявить свойства функции, при которых единственность решения задачи минимизации была бы гарантированной.

**Определение 1.5**. *Функция f*, *определенная на отрезке* [*a*,*b*]называется ***выпуклой***, если справедливо неравенство

*f* [*х*+(1–**)*у*] ≤ *f*(*х*)+ (1–**)*f*(*у*) ∀*х*,*у*∈[*а*,*b*], **∈(0,1).

*Если в этом соотношении знак равенства реализуется исключительно при х=у, то рассматриваемую функцию называют* ***строго выпуклой***.

Выпуклость функции, определенной на всей числовой оси, определяется аналогично. Геометрически выпуклость функции означает, что часть кривой *f = f*(*x*), соединяющая точки с координатами (*х*,*f* (*х*)) и (*у*, *f*(*у*)), располагается не выше (для строго выпуклой функции – ниже) отрезка прямой, соединяющей эти точки, см. Рис. 1.13.

Достаточное условие единственности минимума функции дает следующее утверждение[[33]](#endnote-33).



Рис. 1.13. Выпуклость функции.

**Теорема 1**.**4**. *Строго выпуклая функция на отрезке или на числовой прямой имеет не более одной точки минимума*[[34]](#endnote-34).

**Доказательство**. Предположим, что существует две различные точки *х* и *у* минимума строго выпуклой функции *f* на множестве *U*, представляющей собой отрезок или всё множество действительных чисел. Тогда точка *х*+(1–**)*у* для любого числа **∈(0,1) будет принадлежать рассматриваемому множеству[[35]](#endnote-35). Учитывая строгую выпуклость функции, установим неравенство

*f* [*х*+(1–**)*у*] < * f*(*х*)+ (1–**)*f*(*у*) = ** min*f*(*U*) + (1–**) min*f*(*U*) = min*f*(*U*).

Итак, нашелся такой элемент множества *U*, на котором значение функционала меньше минимально возможного значения. Таким образом, предположение о существовании двух различных точек минимума привело к противоречию.

Убедимся, что рассмотренная в Примере 1.1 *f*(*x*)=*x*2 является строго выпуклой. Действительно, имеем

*f* [*х*+(1–**)*у*] – * f*(*х*)– (1–**)*f*(*у*) = [*х*+(1–**)*у*]2 – *х*2 – (1–**)*у*2 =

= ****–1)(*х*2–2*xy+у*2)=****–1)(*х*–*y*)2.

Очевидно, выражение в правой части этого соотношения не положительна в силу включения **∈(0,1), причем равенство нулю здесь возможно исключительно при *x=y*. Таким образом, рассматриваемая функция оказывается строго выпуклой, и однозначность установленного ранее решения задачи ее минимизации следует из Теоремы 1.4. Аналогичным образом устанавливается единственность точки минимума функции *f*(*x*)=(*x*+1)2 на отрезке [0,1], описанной в Примере 1.10. С другой стороны, функции из Примеров 1.3 и 1.4 являются невыпуклыми, а функция из Примера 1.5 – выпуклой, но не строго выпуклой. Вследствие этого задачи их минимизации имеют не единственное решение. Однако функция *f*(*x*)=|*x*| из Примера 1.9, будучи нестрого выпуклой, имеет единственную точку минимума[[36]](#endnote-36). Единственный минимум существует и для невыпуклой функции, изображенной на Рис. 1.4, и для рассмотренной в Примере 1.2 невыпуклой функции *f*(*x*)=3*x*4–4*x*3–12*x*2. Однако в последнем случае дополнительно существует еще и локальный минимум. Пример невыпуклой функции с единственной точкой минимума изображен на Рис. 1.14[[37]](#endnote-37).



Рис. 1.14. Невыпуклая функция с единственной точкой минимума.

#### **1.7. Корректность задачи по Тихонову**

В Примере 1.6 рассматривалась некорректная по Тихонову задача минимизации функции. В частности, для нее был приведен пример минимизирующей последовательности, которая не сходилась к точке минимума данной функции. Ниже приводится один результат о корректности задачи минимизации функции общего вида. При этом будет использоваться следующее свойство, являющееся усиленным вариантом выпуклости функции[[38]](#endnote-38).

**Определение 1.6.** *Функция f*, *определенная на отрезке* [*a*,*b*] *называется* ***сильно******выпуклой***, *если справедливо неравенство*

*f* (*αх*+(1–*α*)*у*) ≤ *αf*(*х*)+ (1–*α*)*f*(*у*) – *сα*(1–*α*)(*х*–*у*)2 ∀*х*,*у*∈[*а*,*b*], *α*∈(0,1),

*где c – некоторая положительная константа.*

Справедливо следующее утверждение[[39]](#endnote-39).

**Теорема 1.5.** *Если функция f* *сильно выпукла, то задача ее минимизации корректна в смысле Тихонова.*

**Доказательство**. Пусть *x* есть точка минимума данной функции, а {*xk*} – произвольная минимизирующая последовательность, т.е. *f*(*xk*)→inf*f*. Для доказательства теоремы достаточно установить сходимость *xk*→*x*.

Справедливо соотношение

*f* [*xk*+(1–**)*x*] ≤ *f*(*xk*)+(1–**)*f*(*x*)–*c*(1–**)(*xk*–*x*)2.

Отсюда следует соотношение

*f* [*uk*+(1–**)*u*] – *f*(*u*) ≤ **[*f*(*uk*)– *f*(*u*)] – *c*(1–**)(*xk*–*x*)2.

В силу оптимальности управления *x* левая часть последнего неравенства не отрицательна. В результате после деления на ** будем иметь

*c*(1–**)(*xk*–*x*)2 ≤ *f*(*xk*)– *f*(*x*).

Учитывая произвольность параметра **, переходим к пределу при **→0. Таким образом, установим неравенство

≤*c*(*xk*–*x*)2 ≤ *f*(*xk*)– *f*(*x*).

Поскольку последовательность {*xk*} является минимизирующей, выражение в правой части здесь стремится к нулю. Таким образом, имеет место сходимость (*xk*–*x*)2→0, а значит, последовательность {*xk*} сходится к точке минимума *x*. Отсюда в силу произвольности минимизирующей последовательности следует корректность задачи по Тихонову.

В Примере 1.1 рассматривалась функция *f*(*x*)=*x*2. Проверяем свойство выпуклости по второму аргументу. Для любых значений *х*, *у* и *α*∈(0,1) находим величину

*f* (*αх*+(1–*α*)*у*) – *αf*(*х*)– (1–*α*)*f*(*у*) = [*αх*+(1–*α*)*у*]2 – *αx*2 – (1–*α*)*y*2 =

= –*α*(1–*α*)(*x*2 – 2*xy* + *y*2) = –*α*(1–*α*)(*x*–*y*)2.

Таким образом, справедливо условие сильной выпуклости в форме равенства с константой *c=*1, а значит, корректность соответствующей задачи. В то же время рассматриваемая же в Примере 1.6 функция вообще не является выпуклой, см. Рис. 1.8. Тем самым установленное ранее отсутствие корректности задачи ее минимизации представляется вполне естественной.

#### **1.8. Достаточные условия минимума функции**

В Примере 1.1 условие стационарности было необходимым и достаточным условием минимума функций, в то время как в последующих примерах отдельные точки стационарности не являлись решениями задачи минимизации. В этих примерах мы находили все решения условия стационарности, вычисляли значения функции в каждой из этих точек, а потом находили решение задачи, оставив лишь те точки, в которых значение функции оказалось наименьшим. Естественно, такая процедура возможна лишь в исключительных ситуациях, когда рассматриваемая функция достаточно проста, и мы можем найти все точки стационарности. Более реалистичен случай, когда найдена точка стационарности, и хотелось бы узнать, является ли она точкой, если не абсолютного, то хотя бы локального минимума данной функции. Ниже приводится один результат в этом направлении[[40]](#endnote-40).

**Теорема 1**.**6.** *Если в некоторой точке стационарности вторая производная функции положительна* (*соответственно*, *отрицательна*), *то в этой точке достигается строгий локальный минимум* (*соответственно*, *максимум*) *этой функции.*

**Доказательство**. Предположим, для функции *f=f*(*x*) в некоторой точке *x*0выполняются условия *f*'(*x*0)=0 и *f*"(*x*0)>0. В силу последнего неравенства первая производная функции в точке *x*0возрастает. Учитывая, что значение производной в самой точке равно нулю, заключаем, что для достаточно малого положительного числа *ε* выполнены неравенства *f*'(*x*)<0 при *x*∈(*x*0–*ε*,*x*0) и *f*'(*x*)>0 при *x*∈(*x*0,*x*0+*ε*). Пользуясь формулой Лагранжа о конечных приращениях, для любой точки *x*∈(*x*0–*ε*,*x*0) справедливо равенство *f*(*x*) = *f*(*x*0)–*f*'(*ξ*)(*x*0–*x*), где *ξ*∈(*x*,*x*0). Учитывая отрицательность производной, заключаем, что *f*(*x*)>*f*(*x*0). Аналогично, для любой точки *x*∈(*x*0,*x*0+*ε*) имеем *f*(*x*) = *f*(*x*0)+*f*'(*ξ*)(*x*–*x*0), Учитывая положительность производной, заключаем, что *f*(*x*)>*f*(*x*0). Таким образом, для достаточно малых *ε* последнее неравенство справедливо для любой точки из интервала (*x*0–*ε*,*x*0+*ε*), отличной от *x*0. Следовательно, *x*0 действительно является точкой строгого локального минимума данной функции. Свойства локального максимума устанавливаются аналогично.

Воспользуемся данной теоремой для дальнейшего анализа описанных ранее примеров. В Примере 1.1 рассматривалась функция *f*(*x*)=*x*2, имеющая единственную точку стационарности *x*=0. Ее вторая производная равна 2, т.е. положительна. Тогда в силу Теоремы 1.5 этой точке достигается минимум, что и было установлено ранее. В Примере 1.2 рассматривалась функция *f*(*x*)=3*x*4–4*x*3–12*x*2 с тремя точками стационарности *x*1=–1, *x*2=0, *x*3=2. Находим вторую производную *f*"(*x*)=12(3*x*2–2*x*–2). Определяем соответствующие значения в указанных точках: *f*"(–1)=36, *f*"(0)= –24, *f*"(2)=72. В результате заключаем, что в точках *x*1 и *x*3 реализуется строгий локальный минимум *x*2, а в точке – строгий локальный максимум, что согласуется с полученными ранее результатами, см. Рис. 1.2. Аналогичные рассуждения можно провести для Примеров 1.3 и 1.4.

В Теореме 1.6 не говорится о случае, когда вторая производная функции в ее критической точке обращается в нуль, что выполняется для Примера 1.8. Однако соответствующие результаты могут быть легко получены с использованием производных более высокого порядка[[41]](#endnote-41).

#### **1.9. Минимизация негладкой функции**

Практически во всех рассмотренных ранее случаях исследовались дифференцируемые функции. Однако в Примере 1.10 дана негладкая функция *f*(*x*)=|*x*|. Возникает вопрос, можно ли каким-то образом распространить условие стационарности на задачи такой природы. Подобный результат можно было бы получить за счет обобщения понятия производной.

**Определение 1.7**. *Число p называется* ***субградиентом*** *функции f в точке x*0, *если для любого числа x справедливо неравенство*

*f*(*x*) ≥ *f*(*x*0) + *p*(*x*–*x*0).

*Множество всех субградиентов функции в данной точке называется ее* ***субдифференциалом*** *и обозначается* ∂*f*(*x*0). *Если субдифференциал функции в точке не пуст, то функция называется* ***субдифференцируемой*** *в данной точке.*

Субградиент функции имеет естественный геометрический смысл. Рассмотрим прямую *l*(*x*)=*f*(*x*0)+*p*(*x*–*x*0). Согласно приведенному выше неравенству прямая *l* лежит не выше кривой *f*, причем в точке *x*0 они совпадают. Тогда *p* представляет собой тангенс угла между прямой *l* и осью *x*, см. Рис. 1.15. Вспоминаем, что производная есть тангенс угла наклона касательной в данной точке.



Рис. 1.15. Производная и субградиент.

Если функция *f* дифференцируема в точке *x*0, то, очевидно, ее производная *f* '(*x*0) является субградиентом (достаточно сравнить графики на Рис. 1.15). Нетрудно убедиться, что для непрерывно дифференцируемых функций субдифференциал состоит из единственного элемента – производной, и в том случае, когда существует единственный субградиент в некоторой точке, то производная функции в этой точке существует и равна субградиенту[[42]](#endnote-42). Тем самым субградиент оказывается обобщением понятия производной. Расширение класса дифференцируемых функций при переходе к субдифференцируемым функциям обеспечивается за счет отказа от свойства единственности: производная всегда единственна, а субградиент – нет.

Рассмотрим в качестве примера функцию *f*(*x*)=|*x*|. В любой отличной от нуля точке эта функция дифференцируема, а значит, ее субдифференциал состоит исключительно из производной, равной –1 для отрицательных значений аргумента и 1 при его положительных значениях. Отсюда следует, что ∂*f*(*x*)={–1} при *x*<0 и ∂*f*(*x*)={1} при *x*>0. Остается определить субдифференциал в нуле, где данная функция не дифференцируема. Для любого *p*∈[–1,1] имеем *px* ≤ |*p||x| ≤ |x*| для любого *x*, т.е. *f*(*x*0) + *p*(*x*–*x*0) ≤ *f*(*x*) при *x*0=0. Таким образом, справедливо вложение [–1,1]⊂∂*f*(0). Предположим теперь, что |*p|*>1 имеем *p*∈∂*f*(0). Тогда, пользуясь определением субградиента, установим, что |*x| ≥ px* для любого *x*. Полагая *x=p*, получаем |*p*|≥|*p*|2, чего не может быть. Таким образом, справедливо равенство
∂*f*(0)=[–1,1], см. Рис. 1.16.



Рис. 1.16. Субдифференциал функции *f*(*x*)=|*x*| в нуле.

**Теорема 1**.**7**. *Если субдифференцируемая функция f в точке* *x*0 *имеет минимум в этой точке*, *то справедливо включение* 0∈∂*f*(*x*0)*.*

Действительно, неравенство *f*(*x*)≥*f*(*x*0)+*p*(*x*–*x*0) при *p*=0 принимает вид *f*(*x*)≥*f*(*x*0). Поскольку, согласно определению субградиента это соотношение должно выполняться для всех *x*, заключаем, что в точке *x*0 данная функция имеет минимум[[43]](#endnote-43).

Теорема 1.7 служит обобщением Теоремы 1.1, поскольку в случае дифференцируемости функции ее единственный субградиент является производной, которая в силу Теоремы 1.7 равна нулю[[44]](#endnote-44). В качестве иллюстрации вернемся к рассмотрению Примера 1.10, для которого *f*(*x*)=|*x*|. Ранее было установлено, что субдифференциал данной функции состоит из единственного значения –1 для отрицательных *x*, из единственного значения 1 для положительных *x* и представляет собой отрезок [–1,1] в нулевой точке. Очевидно, нулевое значение субградиента может достигаться исключительно в нуле. Таким образом, лишь точка *x*0=0 может оказаться точкой минимума рассматриваемой функции. Естественно, функция *f*(*x*)=|*x*| достигает минимума именно в этой точке.

#### **1.10. Минимизация функции многих переменных**

Естественным обобщением Задачи 1.1 является ее векторный аналог, т.е. ***задача безусловной минимизации функции многих переменных***.

**Задача 1.2.** *Найти точку минимума функции f=f*(*x*1, *x*2,…, *xn*).

Определив вектор *x*=(*x*1,*x*2,…,*xn*), можно формально свести Задачу 1.2 к Задаче 1.1 минимизации функции *f=f*(*x*). При этом остаются в силе практически все результаты, связанные с минимизацией функции одной переменной.

Векторным аналогом условия стационарности *f* '(*x*)=0 является соотношение

 ∇*f*(*x*)=0. (1.5)

Здесь ∇*f*(*x*) есть ***градиент*** функции *f* в точке *x*, т.е. вектор, компонентами которого является все частные производные рассматриваемой функции в точке *x n*-мерного евклидова пространства R*n*, а под 0 понимается нулевой элемент данного пространства, т.е. *n*-мерный вектор, все компоненты которого равны нулю. Векторным аналогом теоремы Ферма является утверждение о том, что для того, чтобы дифференцируемая функция многих переменных имела минимум в некоторой точке, необходимо, чтобы ее градиент в этой точке обращался в нуль[[45]](#endnote-45), т.е. выполнялось соотношение (1.5). Более точно, оно представляет собой необходимое условие локального экстремума функции многих переменных. Если условие стационарности является алгебраическим уравнением относительно точки экстремума, то (1.5) представляется собой систему алгебраических уравнений.

Непрерывная функция многих переменных в замкнутой ограниченной области евклидова пространства достигает своего максимума и минимума. Кроме того, непрерывная ограниченная снизу коэрцитивная функция многих переменных на замкнутом подмножестве евклидова пространства достигает своего минимума. При этом функция *f* называется ***коэрцитивной***, если при |*x*|→∞ имеет место сходимость *f*(*x*)→+∞, где под |*x*| понимается модуль вектора.

Формулировка теоремы единственности для функции многих переменных связана с чрезвычайно важным свойством области определения рассматриваемой функции[[46]](#endnote-46).

**Определение 1.8**. *Подмножество U евклидова пространства является* ***выпуклым*** *при выполнении условия*

*х*+(1–**)*у*∈*U* ∀*х*,*у*∈*U*, **∈(0,1).

Геометрический смысл данного определения является максимально наглядным для плоских множеств. В частности, множество является выпуклым, если с любыми своими двумя точками оно полностью содержит и отрезок, соединяющий эти точки, см. Рис. 1.17. Естественно, отрезок [*а*,*b*] оказывается выпуклым подмножеством числовой прямой.



Рис. 1.17. Выпуклость множества на плоскости.

Строго выпуклая функция на выпуклом подмножестве евклидова пространства имеет не более одной точки минимума.

Как известно, достаточные условия экстремума функции одной переменной в точке стационарности определялись знаком ее второй производной. Для функции *n* переменных аналогом второй производной является ***гессиан*** – квадратная матрица *n-*ого порядка, элементами которой являются всевозможные частные производные второго порядка данной функции в рассматриваемой точке. Если гессиан функции в точке стационарности, т.е. на решении уравнения (1.5), является положительно определенным, то эта точка является точкой локального минимума функции, а если отрицательно определенным, это то это есть точка ее локального максимума. При этом матрица *A* называется ***положительно определенной***, если справедливо неравенство



и отрицательно определенной, если здесь знак > заменить на <, причем в левой части неравенства находится ***скалярное произведение*** соответствующих векторов (сумма произведений их компонент).

Если функция многих переменных имеем минимум в некоторой точке, то нулевой вектор принадлежит субдифференциалу функции в этой точке, где ***субдифференциал*** функции *f* в точке *x*0 состоит из всех векторов *p* (***субградиентов***), удовлетворяющих неравенству



в правой части которого находится скалярное произведение векторов[[47]](#endnote-47).

#### **Дополнительные выводы**

На основании результатов, приведенных в Приложении, можно сделать некоторые дополнительные выводы о задаче минимизации функции одной переменной.

* Существование минимума и максимума функции гарантировано, если сама функция непрерывна, а область, на которой она минимизируется, является замкнутой и ограниченной.
* Существование минимума непрерывной функции на неограниченном замкнутом множестве гарантировано, если сама функция является ограниченной снизу и коэрцитивной.
* В отсутствии выше указанных ограничений существование минимума функции возможно, но не гарантировано.
* Единственность точки минимума гарантирована для строго выпуклой функции, рассматриваемой на отрезке или на всей числовой прямой.
* В отсутствии выше указанных свойств единственность минимума функции возможна, но не обязательна.
* Корректность по Тихонову задачи минимизации функции гарантирована в случае сильной выпуклости этой функции.
* Если в точке стационарности вторая производная функции положительна (соответственно, отрицательна), то в этой точке достигается строгий локальный минимум (соответственно, максимум) функции.
* Обобщением условия стационарности на негладкие функции является условие включения нуля в субдифференциал функции в точке ее локального минимума.
* Предшествующим утверждением можно воспользоваться для задачи минимизации модуля, который является субдифференцируемой, но не дифференцируемой функцией.
* Если функция дифференцируема в точке, то ее производная является ее единственным субградиентом в этой точке.
* Если функция субдифференцируема в точке, и субдифференциал состоит из единственного элемента, то последний является производной функции в этой точке.
* Полученные результаты естественным образом распространяются на задачи минимизации функции многих переменных.

### Замечания

1. Задачам минимизации функций посвящена обширная литература, см., в частности, Васильев1, Федоренко, Boyd, Céa, Floudas, Gill, Mitchell, Nelder, Nocedal, Polak, Lee, Snyman. Можно рассматривать задачи отыскания минимума функции многих переменных и даже ***функционалов*** – преобразований, сопоставляющих объекту произвольной природы (например, функции) некоторое число. С задачами минимизации функционалов связано ***вариационное*** ***исчисление*** (см. Эльсгольц, Bliss, Young), а также теория оптимального управления, являющаяся предметом последующих частей книги. [↑](#endnote-ref-1)
2. Условие стационарности относят к ***условиям экстремума первого порядка***, поскольку оно использует лишь первую производную минимизируемой функции. [↑](#endnote-ref-2)
3. Исследование критических точек функции связано с ***теорией Морса***, см. Aubin, Milnor, Postnikov. [↑](#endnote-ref-3)
4. Приведенные понятия естественным образом распространяются на функции многих переменных и функционалы общего вида. [↑](#endnote-ref-4)
5. ***Окрестность*** является важнейшим понятием топологии, см., например, Kelley. При работе с функциями всё достаточно очевидно, однако при переходе к функционалам приходится уточнять, что именно понимается под окрестностями. В частности, в вариационном исчислении рассматриваются условия ***слабого*** и ***сильного экстремума***, которые как раз и различаются определением окрестностей, см. Эльсгольц, Bliss. [↑](#endnote-ref-5)
6. В данном курсе мы не рассматриваем собственно достаточные условия экстремума. О достаточных условиях вариационного исчисления см. Эльсгольц, Bliss, Young. Достаточные условия оптимальности в задачах оптимального управления приводятся, например, в Krotov, Peterson. [↑](#endnote-ref-6)
7. Поскольку условие экстремума, являющееся как необходимым, так и достаточным, будет эквивалентно исходной задачи поиска экстремума, они обладают одинаковой степенью сложности. То обстоятельство, что условие стационарности является, вообще говоря, более простым объектом исследования, чем исходная задача, требует определенной платы. Таковой и является возможность получение «лишних» решений. [↑](#endnote-ref-7)
8. Для выяснения вопроса, почему в процессе исследования условия стационарности появляются «лишние» точки, вернемся к доказательству теоремы 1.1. Если бы рассматриваемая точка *x* доставляла максимум, а не минимум функции *f*, то в выражение в левой части неравенства (1.2) имело бы противоположный знак. Вследствие этого вместо (1.3) мы бы получили соотношение (1.4), а вместо неравенства (1.4) – условие (1.3). Тем самым, оба неравенства (1.3) и (1.4), а значит, и условие стационарности (1.1) могут быть в равной степени получены в том случае, когда *x* является точкой минимума и максимума функции *f*. Следовательно, на основе соотношения (1.1) нельзя отличить минимум от максимума функции. Если теперь *x* оказывается лишь точкой лишь локального минимума функции, то соотношение (1.2) будет справедливо не для всех *h*, а лишь для достаточно малых значений этого параметра. В этом случае ничто не мешает нам вновь перейти к пределу при *h*→0 и получить неравенство (1.3), а значит, и условие стационарности. Это объясняет тот факт, что соотношению (1.1) может удовлетворять не только точка абсолютного экстремума функции, но и точка ее локального экстремума. [↑](#endnote-ref-8)
9. С отсутствием достаточным условий оптимальности для различных задач оптимального управления мы еще столкнемся неоднократно, см., в частности, Разделы 5, 6, 10. [↑](#endnote-ref-9)
10. Отсюда, в частности, уже следует, что условие стационарности можно использовать и для отыскания максимумов функции. [↑](#endnote-ref-10)
11. Обращаем внимание на то, что рассматриваемая функция является четной, т.е. инвариантна относительно смены знака. Действительно, двум значениям аргумента, различающимся знаком, соответствует одно и то же значение функции. Этим обстоятельством и объясняется отсутствие единственности решения задачи. С аналогичными эффектами мы столкнемся при анализе задач оптимального управления, см. Раздел 5. [↑](#endnote-ref-11)
12. С задачами оптимального управления, в которых отсутствует как единственность решения, так и достаточность условий экстремума, мы еще столкнемся неоднократно. Это относится, в частности, к рассматриваемому в Разделе 5 Примеру 5.1, к ряду примеров из Раздела 6, а также к Примеру 10.1 из Раздела 10. [↑](#endnote-ref-12)
13. В Примере 5.1 будет рассматриваться задача оптимального управления, условия оптимальности для которой также имеют бесконечное множество решений. Однако лишь два из них являются оптимальными. Другие примеры с подобными свойствами рассматриваются также в Разделе 6. [↑](#endnote-ref-13)
14. Мы имеем здесь дело с ***континуальным множеством***. В Разделе 6 мы рассмотрим задачу оптимального управления, множество решений которой также является континуальным множеством, см. Пример 6.1. Характерно, что в обоих случаях мы имеем дело с функцией и функционалом, которые являются выпуклыми, но не строго выпуклыми. Качественно иной пример задачи оптимального управления с континуальным множеством решений приводится в Разделе 14. [↑](#endnote-ref-14)
15. Данный пример приводится в Васильев1. [↑](#endnote-ref-15)
16. Аналогичным образом вводится понятие корректности по Тихонову для задач минимизации функционалов, см. Раздел 8. В Разделе 2 будет определено также понятие корректности по Адамару. [↑](#endnote-ref-16)
17. Примеры задач оптимального управления, некорректных в смысле Тихонова, рассматриваются в Разделах 8 и 11. [↑](#endnote-ref-17)
18. Приближенные методы решения задач минимизации функции описываются в последующем разделе. [↑](#endnote-ref-18)
19. В этой связи приобретает актуальности вопрос о том, что следует понимать под приближенным решением задачи минимизации функции, см. Раздел 2. [↑](#endnote-ref-19)
20. Доказательство Теоремы 1.1 начинается с предположения о том, что *x* есть точка минимума рассматриваемой функции. Если это предположение не реализуется, то и последующие рассуждения теряют смысл. Однако если бы решение задачи существовало, то оно бы наверняка удовлетворяло условию стационарности. Таким образом, отсутствие решений условия стационарности является верным признаком, что абсолютный минимум функции не существует. [↑](#endnote-ref-20)
21. Это обстоятельство связано с отсутствием экстремумов у рассматриваемой функции. В данном случае мы имеем дело с ***точкой перегиба*** функции. Любопытно, что в данной точке обращается в нуль не только первая, но и вторая производная функции. Не надо, впрочем, думать, что обращение в нуль первых двух производных функции в некоторой точке является свидетельством того, что мы имеем дело именно с точкой перегиба. Подобная ситуация реализуется, к примеру, для функции *f*(*x*)=*x*4 в нуле. Тем не менее, эта функция имеет там абсолютный минимум. Для функции одной переменной решение условия стационарности оказывается либо точкой экстремума (локального или абсолютного), либо точкой перегиба. Для функций многих переменных, а, тем более, для функционалов общего вида существует значительно более богатое многообразие форм критических точек, см. Арнольд. [↑](#endnote-ref-21)
22. В Разделе 11 приводится задача оптимального управления, не имеющая решения, в то время как решение соответствующего необходимого условия оптимальности решение имеет, см. Пример 11.5. [↑](#endnote-ref-22)
23. Естественно, в том случае, когда минимизируемая функция не является дифференцируемой, мы не сможем получить неравенство (1.2) и вытекающее из него условие стационарности. Тем не менее, задача минимизации этой функции вполне осмысленна, а следовательно, разработка эффективных методов решения подобных задач представляет несомненный интерес. [↑](#endnote-ref-23)
24. Естественно, что в том случае, когда точка стационарности удовлетворяет заданным ограничениям, она может оказаться решением поставленной задачи на условный экстремум функции. В частности, если функция *f*(*x*)=(*x*+1)2 минимизируется на отрезке [–2,0], то единственная точка стационарности *x*=–1 оказывается решением данной задачи. [↑](#endnote-ref-24)
25. О методах поиска абсолютного минимума функций см. FloudasDet, Pintér. [↑](#endnote-ref-25)
26. Другие методы поиска экстремумов функций см. Васильев1, Федоренко, Boyd, Céa, Floudas, Gill, Mitchell, Nelder, Nocedal, Polak, Lee, Snyman. [↑](#endnote-ref-26)
27. В теореме Вейерштрасса говорится о разрешимости задачи на условный экстремум, которая в действительности будет рассмотрена в последующем разделе. [↑](#endnote-ref-27)
28. ***Замкнутость*** множества относится к числу важнейших топологических понятий, см. Kelley. На числовой прямой замкнутыми множествами на прямой являются вся прямая, полубесконечные интервалы (-∞,*b*], [*a*,∞), замкнутые интервалы [*a*,*b*], множества, состоящие из отдельных точек {*x*}, а также объединения указанных множеств. [↑](#endnote-ref-28)
29. При переходе к задачам минимизации функционалов общего вида мы уже не сможем пользоваться теоремой Больцано–Вейерштрасса при доказательстве существования решения. Однако существует ее обобщение, называемое теоремой Банаха–Алаоглу, которое позволяет добиться желаемых результатов для некоторого класса решаемых задач, см. Hutson, Reed. [↑](#endnote-ref-29)
30. Замкнутое множество содержит пределы всех сходящихся последовательностей элементов этого множества. Так, последовательность {*xk*}, характеризуемое равенством *xk*=1/*k*, состоит из элементов незамкнутого интервала (0,1) и сходится. Однако ее предел не принадлежит этому интервалу. [↑](#endnote-ref-30)
31. В Разделе 7 приводится обобщение теоремы 1.3 на задачу минимизации функционала на неограниченном подмножестве некоторого нормированного пространства. При этом будет использовать свойство коэрцитивности функционалов. [↑](#endnote-ref-31)
32. К примеру, функция, принимающая значение –1 при отрицательных значениях аргумента и 1 при их положительных значениях достигает своего минимума, будучи разрывной. Квадратичная функция на интервале (–1,1) имеет точку минимума, хотя минимизируется на незамкнутом множестве. [↑](#endnote-ref-32)
33. В Разделе 5 будет дано обобщение Теоремы 1.4 на задачу минимизации строго выпуклого функционала на выпуклом подмножестве векторного пространства. [↑](#endnote-ref-33)
34. Для того, чтобы получить достаточные условия единственности максимума функции, требуется в условиях теоремы заменить выпуклость функции на вогнутость. [↑](#endnote-ref-34)
35. Фактически здесь используется выпуклость множества *U.* Общее определение выпуклости множества будет дано в Разделе 5. [↑](#endnote-ref-35)
36. В Разделе 6 будет рассмотрена задача оптимального управления с выпуклым, но не строго выпуклым функционалом, которая имеет бесконечное множество решений. С другой стороны, в Разделе 9 описывается оптимизационная задача с выпуклым, но не строго выпуклым функционалом, решение которой единственно. [↑](#endnote-ref-36)
37. Изображенную на Рис. 1.14 функцию можно назвать локально строго выпуклой в том смысле, что она является строго выпуклой в окрестности точки минимума. [↑](#endnote-ref-37)
38. Понятие сильной выпуклости функции одной переменной естественным образом распространяется на функции многих переменных и даже на функционалы. При этом в правой части выражение (*x–y*)2 заменяется на квадрат нормы разности ||*x–y*||2. [↑](#endnote-ref-38)
39. Обобщение Теоремы 1.5 на задачи минимизации функционалов будет приведено в Разделе 8. [↑](#endnote-ref-39)
40. В Теореме 1.6 дается ***условие экстремума второго порядка***, поскольку здесь используются вторые производный минимизируемой функции. В Разделе 6 приводится утверждение, являющееся некоторым обобщением Теоремы 1.6. Речь идет об условии Келли, характеризующим оптимальность особого управления – специфического решения необходимого условия оптимальности в форме принципа максимума. [↑](#endnote-ref-40)
41. Теорема 1.6 случае не охватывает случай, когда в точке стационарности не только первая, но и вторая производная обращается в нуль. Однако несложно установить следующий результат. Пусть все производные функции в критической точке до порядка *n–*1 обращается нуль, а производная *n*-ого порядка отлична от нуля. Если число *n* четно, и эта производная положительна (соответственно, отрицательна), то в данной точке достигается минимум (соответственно, максимум) данной функции. Если же число *n* нечетно, то в этой точке экстремум не достигается. В частности, в Примере 1.8 рассматривается функция *f*(*x*)=*x*3 с единственной точкой стационарности *x*=0. Здесь вторая производная равна нулю, но третья производная отлична от нуля. Поскольку мы имеем дело с производной нечетного порядка, в данной точке экстремума нет, что согласует с полученными ранее результатами, см. Рис. 1.10. С другой стороны, функция *f*(*x*)=*x*4 также имеет единственную точку стационарности *x*=0. Однако теперь мы уже имеем дело с четным порядком производной. Соответствующая четвертая производная положительна, и в данной точке функция имеет минимум. Отметим, впрочем, что для анализа задач оптимального управления, рассматриваемых в последующих частях книги и являющихся основными объектами исследования, работа даже со вторыми производными, как правило, оказывается не эффективной. Тем не менее, в Разделе 6 будет приведено одно условие оптимальности второго порядка. [↑](#endnote-ref-41)
42. Доказательство этого утверждения и другие свойства субградиента см. Васильев, Кусраев, Ekeland. [↑](#endnote-ref-42)
43. Из Теоремы 1.7 следует также, что в точке минимума произвольная функция является субдифференцируемой. [↑](#endnote-ref-43)
44. Существуют и более общие конструкции для негладкой оптимизации, например, ***производная Кларка***, см. Кларк. По поводу методов негладкой оптимизации см. также Ekeland, Mäkelä, Mitchell, Nelder. В Разделе 4 будет рассмотрена одна задача оптимального управления с негладким функционалом. [↑](#endnote-ref-44)
45. Понятие производной естественным образом распространяется и на функционалы, что предопределяет возможность обобщения теоремы Ферма на существенно более широкий класс задач отыскания экстремума. В частности, необходимым условием минимума функционала, определенного на некотором топологическом векторном пространстве, является равенство нулю его производной Гато в точке минимума. Это утверждения для одного конкретного примера будет установлено в Разделе 4. В задачах минимизации функционалов общего вида условие стационарности уже не будет алгебраическим уравнением. В частности, в вариационном исчислении рассматривается ***задача Лагранжа***, которая предполагает минимизацию интегрального функционала, зависящего от искомой функции и ее производной. Соответствующее условие стационарности представляет собой ***уравнение Эйлера***, являющееся обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка. Для ***задачи Дирихле***, состоящей в минимизации некоторого специального интеграла, зависящего от функции многих переменных и ее частных производных, условием стационарности оказывается ***уравнение Пуассона***, относящееся к классу уравнений в частных производных. О связи между теорией экстремума и общей теории дифференцирования см., например, SerovajskyDif. [↑](#endnote-ref-45)
46. Свойство выпуклости естественным образом распространяется на подмножества произвольного векторного пространства. [↑](#endnote-ref-46)
47. Это утверждение распространяется и на задачи минимизации функционалов, см. Ekeland. [↑](#endnote-ref-47)